METODO DIRETTO

$$\mathcal{L}(u) = \int_I L(x, u, u')\, dx$$

CERCHIAMO $\min \{ \mathcal{L}(u) : u \in \mathcal{A} \}$

$\mathcal{A}$ CLASSE DI FUNZIONI CON UNA NOZIONE DI CONVERGENZA

1 $u_n \in \mathcal{A}$ SUCCESSIONE MINIMIZZANTE

$$\mathcal{L}(u_n) \xrightarrow[n]{} \inf_{\mathcal{A}} \mathcal{L}, \quad \text{IN PART. } \mathcal{L}(u_n) \leq C \quad \forall n$$

$\exists\, u_{n_k} \to u \in \mathcal{A}$ [COMPATTEZZA]

SCELTA DI $\mathcal{A}$

IPOTESI SU $\mathcal{L}$

2. $\mathcal{L}(u) \leq \liminf_{k} \mathcal{L}(u_{n_k})$ [SEMICONTINUITÀ]

IPOTESI SU $\mathcal{L}$

3. u min in $\mathcal{A}$ $\Rightarrow \begin{cases} u \in Lip \\ u \in C^1 \\ u \in C^k \end{cases}$

IPOTESI SU $\mathcal{L}$

ESEMPI DI $\mathcal{A}$: $C^1(I)$, $Lip(I)$, $W^{1,p}(I)$, $AC(I) = W^{1,1}(I)$

CON EVENTUALI VINCOLI O COND. AL BORDO

ELEMENTI DI ANALISI FUNZIONALE

E SPAZIO DI BANACH, CIOÈ

E SP. VETTORIALE (SU $\mathbb{R}$), NORMATO E COMPLETO

E^* SPAZIO DUALE

$E^* = \{ u : E \to \mathbb{R}$ LINEARI E CONTINUE $\}$

$$\|u\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} u(x) = \sup_{x \neq 0} \frac{u(x)}{\|x\|_E}$$ SP. VETTORIALE NORMATO

PROP: E^* È COMPLETO $\Rightarrow$ E^* È UN BANACH

OSS: $u \in E^*$ $\quad |u(x) - u(y)| = |u(x-y)| \leq \|u\|_{E^*} |x-y|$

u È LIPSCHITZ DI COSTANTE $\|u\|_{E^*}$

OSS: $E = \mathbb{R}^n$ $\quad u \in (\mathbb{R}^n)^* \Leftrightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n$ T.C. $u(x) = \langle v, x \rangle$

$(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$

LO STESSO VALE IN SP. DI HILBERT (TEO DI RIESZ)

DIM: $u_n \in E^*$ DI CAUCHY, $\quad \forall \varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon$ T.C.

$\| u_n - u_m \|_{E^*} \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$, CIOÈ

$| u_n(x) - u_m(x) | \leq \varepsilon \|x\|_E \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$ E $\forall x \in E$

IN PART. $u_n(x) \in \mathbb{R}$ È DI CAUCHY $\Rightarrow u_n(x) \xrightarrow[n]{} u(x)$

$u(ax+by) = \lim_n u_n(ax+by) = \lim_n [a u_n(x) + b u_n(y)] = a u(x) + b u(y)$

u È LINEARE

u_n DI CAUCHY $\Rightarrow$ u_n LIMITATA, CIOÈ $|u_n(x)| \leq C \|x\|_E \quad \forall n, \forall x$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq C \|x\|_E \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad u \in E^*$$

$$\lim_{m\to\infty} |u_n(x) - u_m(x)| = |u_n(x) - u(x)| \leq \varepsilon \|x\|_{E^*} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x$$

$$\Rightarrow u_n \xrightarrow[n]{} u \text{ IN } E^*.$$

OSS: $\dim_{\mathbb{R}} E = +\infty \Rightarrow \exists\, u: E \to \mathbb{R}$ LINEARE NON CONTINUA

TOPOLOGIA DEBOLE

POSSIAMO MUNIRE E DI UNA TOPOLOGIA DEBOLE, CIOÈ CON MENO APERTI MA PIÙ COMPATTI RISPETTO ALLA TOPOLOGIA USUALE.

$\sigma(E,E^*)$ È LA TOPOLOGIA MENO FINE CHE RENDE CONTINUE LE FUNZIONI $u \in E^*$

UNA BASE DI INTORNI DI 0 SONO GLI APERTI DEL TIPO

$$\bigcap_{i=1}^{n} u_i^{-1}\left((-\varepsilon_i, \varepsilon_i)\right) \qquad u_i \in E^*, \quad \varepsilon_i > 0$$

$$V \text{ APERTO IN } \sigma(E,E^*) \Rightarrow V = \bigcup_{j \in J} (U_j + x_j) \qquad x_j \in E$$

U_j COME SOPRA

LEMMA: $x_n \xrightarrow[n]{} x$ RISP. A $\sigma(E,E^*)$ $\Longleftrightarrow$ $u(x_n) \to u(x)$ $\forall u \in E^*$

SI DICE CHE x_n CONV. DEBOLMENTE A x

OSS: $x_n \xrightarrow[n]{} x \Rightarrow x_n \xrightarrow[n]{} x$, MA NON VALE $\Leftarrow$ SE $\dim E = +\infty$

OSS: $\dim E < +\infty$, $\sigma(E,E^*)$ È LA TOP. FORTE DI E

ES: $\ell_2 = \{ (x_n) : \sum x_n^2 < +\infty \}$ $\quad \|x\|_{\ell_2} = \langle x, x \rangle_{\ell_2}^{\frac{1}{2}}$ SPAZI DI HILBERT

$$\langle x, y \rangle_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

$e_i = (0 \dots, 1, 0 \dots 0 \dots)$ $\quad e_i \xrightarrow[i]{} 0 \quad$ MA $\|e_i\| = 1 \Rightarrow e_i \not\xrightarrow[i]{} 0$

$i^{\underline{a}}$ POSIZIONE

$\ell_2^* \simeq \ell_2$

ES: $\ell_p = \left\{ (x_n) : \sum |x_n|^p < +\infty \right\}$ $\quad 1 \leq p < +\infty$

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n) : \sup_n |x_n| < +\infty \right\} \qquad \|x\|_{\ell_\infty} = \sup_n |x_n|$$

$$\ell_p^* \simeq \ell_q \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad q = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & p \neq 1 \\ +\infty & p = 1 \end{cases}$$

ES: $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mis} : \int |u|^p < +\infty \right\} \Big/ \sim$ $\quad 1 \leq p < +\infty$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\qquad \|u\|_{L^p} = \left(\int |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \underbrace{\operatorname{ess\,sup}_x |u(x)|}_{= \|u\|_{L^\infty}} < +\infty \right\} \Big/ \sim$$

$$(L^p)^* \simeq \begin{cases} L^q & q = \frac{p}{p-1} \quad p \neq 1 \\ L^\infty & p = 1 \end{cases}$$

DEF: $E^{**} = (E^*)^*$ SI CHIAMA BIDUALE DI E

$\exists\, i : E \to E^{**}$ LINEARE INIETTIVA $\quad i(x)[u] = u(x) \quad \forall x \in E, \ \forall u \in E^*$

$i(E) < E^{**}$ CHIUSO, i ISOMETRIA

SE $i(E) = E^{**}$ E SI DICE RIFLESSIVO

OSS: $E = H$ HILBERT $\Rightarrow$ E RIFLESSIVO

$\ell_p, L^p(\Omega)$ RIFLESSIVI PER $1 < p < +\infty$

$\ell_1, L^1, \ell_\infty, L^\infty$ NON SONO RIFLESSIVI

$c_0^* = \ell_1 \qquad \ell_1^* = \ell_\infty \qquad c_0 < \ell_\infty$

$c_0 = \{(x_n) : x_n \to 0\} \qquad \|x\|_{c_0} = \|x\|_{\ell_\infty}$

DEF: E BANACH È SEPARABILE SE $\exists F \subseteq E$ DENSO E NUMERABILE

ES: c_0, ℓ_p $(p < +\infty)$, $L^p(\Omega)$ $(p < +\infty)$ SONO SPAZI SEPARABILI

ℓ_∞, $L^\infty(\Omega)$ NON SONO SEPARABILI

DEF: E BANACH, $\sigma(E^*, E)$ È LA TOPOLOGIA MENO FINE SU E^* CHE RENDE CONTINUE LE FUNZIONI $u \to u(x)$ $\forall x \in E$.

$\sigma(E^*, E)$ SI CHIAMA TOPOLOGIA DEBOLE $*$ ED È MENO FINE DI $\sigma(E^*, E^{**})$ POICHÉ $E \simeq i(E) \subset E^{**}$

TEO (BANACH-ALAOGLU)

E BANACH SEPARABILE

$u_n \in E^*$, $\|u_n\|_{E^*} \leq C$

$\Rightarrow \exists\, u_{n_k} \rightharpoonup u \in E^*$ IN $\sigma(E^*, E)$